



РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА.

Кабирова Навруза Хаётжон кизи
учитель кафедры математика и родной
язык в начальном образовании ТерГПИ

Аннотация: В данной статье найдено функция $u(x, y)$ внутри области G , ограниченной характеристиками AB , AC и CB уравнения, которая является непрерывной внутри этой области и удовлетворяет краевым условиям.

Ключевые слова: функция, непрерывность, область, характеристики, краевые условия, итерация, сходимость, дифференцируемость.

Annotation: In this article, a function is found inside a domain bounded by characteristics and equations that is continuous inside this domain and satisfies the boundary conditions.

Key words: function, continuity, domain, characteristics, boundary conditions, iteration, convergence, differentiability.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_{xx} - u_{yy}) = 0$$

(1)

Характеристиками для уравнения (1) являются три семейства прямых

$$y = C_1, \quad y + x = C_2 \quad \text{и} \quad y - x = C_3,$$

(2)

где C_1, C_2 и C_3 – произвольные постоянные.

Требуется найти функцию $u(x, y)$ внутри области G , ограниченной характеристиками AB , AC и CB уравнения (1), которая является непрерывной вместе со своими частными производными до третьего порядка внутри этой области и удовлетворяет краевым условиям:

$$u(x, y)|_{AB} = \alpha(x) \quad (0 \leq x \leq 1);$$

$$u(x, y)|_{AC} = \beta(x) \quad \left(0 \leq x \leq \frac{1}{2}\right);$$

(3)

$$u(x, y)|_{BC} = \gamma(y) \quad \left(-\frac{1}{2} \leq y \leq 0\right),$$

где функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(y)$ являются непрерывными функциями со своими производными до третьего порядка включительно в указанных отрезках.

Далее положим, что

$$\alpha(0) = \beta(0) = \beta\left(\frac{1}{2}\right) = \gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \alpha(1) = \gamma(0) = 0 \quad (4)$$

Решение уравнения (1) будем искать в виде

$$u(x, y) = f(x - y) + \varphi(x + y) + F(y),$$

(5)

полагая

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0.$$

Из равенства (5), на основании краевых условий (3), получим:

$$\alpha(x) = f(x) + \varphi(x) + F(0) \quad (0 \leq x \leq 1);$$

$$\beta(x) = f(2x) + F(-x) \quad (0 \leq x \leq \left(\frac{1}{2}\right));$$

(6)

$$\gamma(y) = f\left(\frac{1}{2} - y\right) + \varphi\left(\frac{1}{2} + y\right) + F(y) \quad \left(-\frac{1}{2} \leq y \leq 0\right).$$

Во втором уравнении сделаем замену $2x = t$, а в третьем уравнении $2y = -t$. После этих замен система (6) имеет вид:

$$\alpha(t) = f(t) + \varphi(t) + F(0);$$

$$\beta\left(\frac{1}{2}\right) = f(t) + F\left(\frac{1}{2}\right);$$

(7)

$$\gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1+t}{2}\right) + \varphi\left(\frac{1-t}{2}\right) + F\left(-\frac{1}{2}\right)$$

при $0 \leq t \leq 1$.

Из первого уравнения системы (7) определим $f(t)$:

$$f(t) = \alpha(t) - \varphi(t) - F(0); \quad (8)$$

отсюда

$$f\left(\frac{1+t}{2}\right) = \alpha\left(\frac{1+t}{2}\right) - \varphi\left(\frac{1+t}{2}\right) - F(0) \quad (9)$$

Вычитая из второго уравнения третье в системе (7), получим:

$$\beta\left(\frac{1}{2}\right) - \gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = f(t) - f\left(\frac{1+t}{2}\right) - \varphi\left(\frac{1-t}{2}\right) \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Преобразуем последнее уравнение на основании (8) и (9):

$$\beta\left(\frac{t}{2}\right) - \gamma\left(-\frac{t}{2}\right) = \alpha(t) - \varphi(t) - \alpha\left(\frac{1+t}{2}\right) + \varphi\left(\frac{1+t}{2}\right) - \varphi\left(\frac{1-t}{2}\right)$$

$(0 \leq t \leq 1);$

отсюда

$$\varphi(t) - \varphi\left(\frac{1+t}{2}\right) + \varphi\left(\frac{1-t}{2}\right) = \alpha(t) - \alpha\left(\frac{1+t}{2}\right) + \gamma\left(-\frac{t}{2}\right) - \beta\left(\frac{t}{2}\right) \quad (0 \leq t \leq 1). \quad (10)$$

Введя обозначение

$$\alpha(t) - \alpha\left(\frac{1+t}{2}\right) + \gamma\left(-\frac{t}{2}\right) - \beta\left(\frac{t}{2}\right) = \omega(t) \quad (0 \leq t \leq 1),$$

(a)

перепишем уравнение (10) в виде

$$\varphi(t) - \varphi\left(\frac{1+t}{2}\right) + \varphi\left(\frac{1-t}{2}\right) = \omega(t) \quad (0 \leq t \leq 1), \quad (11)$$

где $\omega(t)$ – известная функция.

Применим к решению уравнения (11) следующий метод итераций:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \omega(t) + \varphi\left(\frac{1+t}{2}\right) - \varphi\left(\frac{1-t}{2}\right); \\ \varphi\left(\frac{1+t}{2}\right) &= \omega\left(\frac{1+t}{2}\right) + \varphi\left(\frac{3+t}{2^2}\right) - \varphi\left(\frac{1-t}{2^2}\right); \\ \varphi\left(\frac{1-t}{2}\right) &= \omega\left(\frac{1-t}{2}\right) + \varphi\left(\frac{3-t}{2^2}\right) - \varphi\left(\frac{1+t}{2^2}\right). \end{aligned}$$

Подставляя значения $\varphi\left(\frac{1+t}{2}\right)$ и $\varphi\left(\frac{1-t}{2}\right)$ из двух последних уравнений в первое, получим:

$$\varphi(t) = \omega(t) + \left[\omega\left(\frac{1+t}{2}\right) - \omega\left(\frac{1-t}{2}\right) \right] + \left[\varphi\left(\frac{3+t}{2^2}\right) - \varphi\left(\frac{3-t}{2^2}\right) \right] +$$

$$+\left[\varphi\left(\frac{1+t}{2^2}\right)-\varphi\left(\frac{1-t}{2^2}\right)\right]. \quad (12)$$

Продолжая итерации, получим, что

$$\begin{aligned} \varphi(t) = \omega(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{2^{i-1}} \left[\omega\left(\frac{2k-1+t}{2^i}\right) - \omega\left(\frac{2k-1-t}{2^i}\right) \right] + \\ + \sum_{i=1}^{2^{n-1}} \left[\varphi\left(\frac{2l-1+t}{2^{n+1}}\right) - \varphi\left(\frac{2l-1-t}{2^{n+1}}\right) \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Теперь покажем, что при $n \rightarrow \infty$ выражение (13) имеет вид:

$$\varphi(t) = \omega(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{i-1}} \left[\omega\left(\frac{2k-1+t}{2^i}\right) - \omega\left(\frac{2k-1-t}{2^i}\right) \right]. \quad (14)$$

Для этого применим формулу Лагранжа для выражения

$$\begin{aligned} \omega\left(\frac{2k-1+t}{2^i}\right) - \omega\left(\frac{2k-1-t}{2^i}\right): \\ \omega\left(\frac{2k-1+t}{2^i}\right) - \omega\left(\frac{2k-1-t}{2^i}\right) = \omega' \left[\frac{(2\theta_k - 1)t + 2k - 1}{2^i} \right] \frac{t}{2^{i-1}}, \end{aligned} \quad (15)$$

где $0 < \theta_k < 1$, $0 \leq t \leq 1$.

Подставляя значение $\omega\left(\frac{2k-1+t}{2^i}\right) - \omega\left(\frac{2k-1-t}{2^i}\right)$ из (15) в (13), будем иметь:

$$\begin{aligned} \varphi(t) = \omega(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{2^{i-1}} \omega' \left[\frac{(2\theta - 1)t + 2k - 1}{2^i} \right] \frac{t}{2^{i-1}} + \\ + \sum_{i=1}^{2^n} \left[\varphi\left(\frac{2l-1+t}{2^{n+1}}\right) - \varphi\left(\frac{2l-1-t}{2^{n+1}}\right) \right]. \end{aligned} \quad (13')$$

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{2^{i-1}} \omega' \left[\frac{(2\theta_k - 1)t + 2k - 1}{2^i} \right] \frac{t}{2^{i-1}} = \\ & = t \sum_{k=1}^{2^{i-1}} \omega' \left[\frac{(2\theta_k - 1)t + 2k - 1}{2^i} \right] \frac{1}{2^{i-1}} \quad (0 \leq t \leq 1). \end{aligned}$$

(16)

Обозначим $\frac{(2\theta_k - 1)t + 2k - 1}{2^i}$ через $t_{k,i}$. Для $t_{k,i}$ выполняются неравенства $\frac{k-1}{2^{i-1}} < t_{k,i} < \frac{k}{2^{i-1}}$ ($k = 1, 2, \dots, 2^{i-1}$).

Отсюда видим, что $\sum_{k=1}^{2^{i-1}} \omega' \left[\frac{(2\theta_k - 1)t + 2k - 1}{2^i} \right] \frac{1}{2^{i-1}}$ можно рассматривать, как интегральную сумму для функции ω' , т.е.

$$\sum_{k=1}^{2^{i-1}} \omega' \left[\frac{(2\theta_k - 1)t + 2k - 1}{2^i} \right] \frac{1}{2^{i-1}} = \sum_{k=1}^{2^{i-1}} \omega'(t_{k,i}) \Delta t_{k,i},$$

где $\Delta t_{k,i} = \frac{1}{2^{i-1}}$.

Поэтому, переходя к пределу, получим:

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2^{i-1}} \omega' \left[\frac{(2\theta_k - 1)t + 2k - 1}{2^i} \right] \frac{t}{2^{i-1}} &= t \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2^{i-1}} \omega'(t_{k,i}) \Delta t_{k,i} = \\ &= t \int_0^1 \omega'(\tau) d\tau = t [\omega(1) - \omega(0)]. \end{aligned}$$

(17)

Из выражения (а) найдём $\omega(1)$ и $\omega(0)$:

$$\omega(1) = \alpha(1) - \alpha(1) + \gamma \left(-\frac{1}{2} \right) - \beta \left(\frac{1}{2} \right) + \varphi(0);$$

$$\omega(0) = \alpha(0) - \alpha\left(\frac{1}{2}\right) + \gamma(0) - \beta(0) + \varphi(0).$$

Отсюда, на основании (4) и (*), получим, что

$$\omega(1) = \omega(0) = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2^{i-1}} \omega' \left[\frac{(2\theta_k - 1)t + 2k - 1}{2^i} \right] \frac{t}{2^{i-1}} = 0 \quad (0 \leq t \leq 1).$$

(17')

Теперь оценим сумму $\sum_{k=1}^{2^{i-1}} \omega' \left[\frac{(2\theta_k - 1)t + 2k - 1}{2^i} \right] \frac{t}{2^{i-1}}$:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{2^{i-1}} \omega' \left[\frac{(2\theta_k - 1)t + 2k - 1}{2^i} \right] \frac{t}{2^{i-1}} \right| &= \left| t \int_0^1 \omega'(\tau) d\tau - \sum_{k=1}^{2^{i-1}} \omega' \left[\frac{(2\theta_k - 1)t + 2k - 1}{2^i} \right] \frac{t}{2^{i-1}} \right| = \\ &= \left| t \sum_{k=1}^{2^{i-1}} \int_{\frac{k-1}{2^{i-1}}}^{\frac{k}{2^{i-1}}} \omega'(\tau) d\tau - t \sum_{k=1}^{2^{i-1}} \omega'(t_{k,i}) \Delta t_{k,i} \right| = \left| t \sum_{k=1}^{2^{i-1}} \left[\int_{\frac{k-1}{2^{i-1}}}^{\frac{k}{2^{i-1}}} \omega'(\tau) d\tau - \omega'(t_{k,i}) \Delta t_{k,i} \right] \right| \end{aligned}$$

Отсюда, на основании теоремы о среднем, имеем:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{2^{i-1}} \omega' \left[\frac{(2\theta_k - 1)t + 2k - 1}{2^i} \right] \frac{t}{2^{i-1}} \right| &= \left| t \sum_{k=1}^{2^{i-1}} [\omega'(\tau_{k,i}) - \omega'(t_{k,i})] \Delta t_{k,i} \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{2^{i-1}} |\omega'(\tau_{k,i}) - \omega'(t_{k,i})| \frac{1}{2^{i-1}}. \end{aligned}$$

(18)

Из определения ω и из условий на функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ следует, что удовлетворяет условию Гёльдера.

$$\text{Значит, в каждом сегменте } \left[\frac{k-1}{2^{i-1}}, \frac{k}{2^{i-1}} \right]$$

$$|\omega'(\tau_{k,i}) - \omega'(t_{k,i})| < N_1 |\tau_{k,i} - t_{k,i}^{\alpha_1}| \leq N_1 \Delta t_{k,i}^{\alpha_1},$$

(19)

где N_1 – некоторое число, $0 < \alpha_1 \leq 1$.

Отсюда и из (18) получим:

$$\left| \sum_{k=1}^{2^{i-1}} \omega' \left[\frac{(2\theta_k - 1 + 2k - 1)}{2^i} \right] \frac{t}{2^{i-1}} \right| < N_1 \sum_{k=1}^{2^{i-1}} \left(\frac{1}{2^{i-1}} \right)^{\alpha_1 + 1} = N_1 \left(\frac{1}{2^{i-1}} \right)^{\alpha_1}$$

($0 \leq t \leq 1$). (20)

Из (20) следует, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{i-1}} \omega' \left[\frac{(2\theta_k - 1)t + 2k - 1}{2^i} \right] \frac{t}{2^{i-1}}$

сходится абсолютно и равномерно на отрезке $[0,1]$ и его сумма непрерывна. Обозначим через $\psi(t)$ сумму этого ряда.

Теперь рассмотрим выражение

$$\sum_{i=1}^{2^n} \left[\varphi \left(\frac{2l - 1 + t}{2^{n+1}} \right) - \varphi \left(\frac{2l - 1 - t}{2^{n+1}} \right) \right].$$

(21)

Пусть для каждой разности $\varphi \left(\frac{2l - 1 + t}{2^{i+1}} \right) - \varphi \left(\frac{2l - 1 - t}{2^{i+1}} \right)$

($l = 1, 2, \dots, 2^i$) можно применить формулу Лагранжа на $[0,1]$ и пусть $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$.

Тогда

$$\sum_{l=1}^{2^n} \left[\varphi \left(\frac{2l - 1 + t}{2^{n+1}} \right) - \varphi \left(\frac{2l - 1 - t}{2^{n+1}} \right) \right] = \sum_{l=1}^{2^n} \varphi' \left[\frac{(2\theta_l - 1)t + 2l - 1}{2^{n+1}} \right] \frac{t}{2^n}.$$

Отсюда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^{2^n} \left[\varphi \left(\frac{2l-1+t}{2^{n+1}} \right) - \varphi \left(\frac{2l-1-t}{2^{n+1}} \right) \right] = 0.$$

(22)

Таким образом, показано, что решение уравнения (11) существует и единственно в классе непрерывно дифференцируемых функций обращающихся в нуль в точках 0,1.

Решение имеет вид:

$$\varphi(t) = \omega(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{i-1}} \omega' \left[\frac{(2\theta_k - 1)t + 2k - 1}{2^i} \right] \frac{t}{2^{i-1}},$$

(23)

$$\text{или } \varphi(t) = \omega(t) + \psi(t).$$

(23') Равномерная сходимость этого ряда на сегменте $[0,1]$ была доказано выше.

Решение (23) можно записать в виде

$$\varphi(t) = \omega(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{i-1}} \left[\omega \left(\frac{2k-1+t}{2^i} \right) - \omega \left(\frac{2k-1-t}{2^i} \right) \right].$$

(24)

Теперь докажем, что $\varphi(t)$ трехкратно дифференцируема на отрезке $[0,1]$.

Для этого надо показать, что ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{i-1}} \left[\omega \left(\frac{2k-1+t}{2^i} \right) - \omega \left(\frac{2k-1-t}{2^i} \right) \right]$$

(25)

можно в три раза почленно дифференцировать.

Формально продифференцируем ряд (25):

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{i-1}} \left[\omega \left(\frac{2k-1+t}{2^i} \right) - \omega \left(\frac{2k-1-t}{2^i} \right) \right] =$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{i-1}} \left[\omega' \left(\frac{2k-1+t}{2^i} \right) - \omega' \left(\frac{2k-1-t}{2^i} \right) \right] \frac{1}{2^i}.$$

Если покажем равномерную сходимость ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{i-1}} \left[\omega' \left(\frac{2k-1+t}{2^i} \right) - \omega' \left(\frac{2k-1-t}{2^i} \right) \right] \frac{1}{2^i}.$$

то тем самым будет показана дифференцируемость ряда (25).

Рассмотрим выражение

$$\sum_{k=1}^{2^{i-1}} \omega' \left(\frac{2k-1+t}{2^i} \right) \frac{1}{2^i}$$

(26)

Обозначим $\frac{2k-1+t}{2^i}$ через $\tau'_{k,i}$. Для $\tau'_{k,i}$ выполняются неравенства

$$\frac{2k-1}{2^i} < \tau'_{k,i} < \frac{k}{2^{i-1}} \quad (k=1, 2, \dots, 2^{i-1}).$$

Формально почленно продифференцировав второй раз ряд (25), получим ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{i-1}} \left[\omega'' \left(\frac{2k-1+t}{2^i} \right) + \omega'' \left(\frac{2k-1-t}{2^i} \right) \right] \frac{1}{2^{2i}}.$$

(27)

Покажем, что этот ряд сходится равномерно на отрезке $[0,1]$. Для этого представим его в виде:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{2^{i-1}} \left[\omega'' \left(\frac{2k-1+t}{2^i} \right) + \omega'' \left(\frac{2k-1-t}{2^i} \right) \right] \frac{1}{2^i} \right\} \frac{1}{2^i}$$

(28)

Из выше указанных условий следует, что ω'' ограничена на $[0,1]$, поэтому $|\omega''(t)| < N_3$ – некоторое число.

Покажем, что этот ряд сходится равномерно на отрезке $[0,1]$. Для этого представим его в виде:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{2^{i-1}} \left[\omega''' \left(\frac{2k-1+t}{2^i} \right) + \left(\frac{2k-1-t}{2^i} \right) \right] \frac{1}{2^i} \right\} \frac{1}{2^{2i}}. \quad (31)$$

Итак, показано, что функция $\varphi(t)$ трехкратно дифференцируема. Теперь выразим $F(t)$ через $\varphi(t)$. Для этого возьмём второе уравнение из системы (7)

$$\beta\left(\frac{t}{2}\right) = f(t) + F\left(-\frac{t}{2}\right).$$

Из этого уравнения найдём

$$F\left(-\frac{t}{2}\right) = \beta\left(\frac{t}{2}\right) - f(t). \quad (32)$$

Преобразуя уравнения (32), на основании уравнения (8), получим:

$$F\left(-\frac{t}{2}\right) = \beta\left(\frac{t}{2}\right) - \alpha(t) + \varphi(t) + F(0),$$

где $\varphi(t)$ даётся формулой (24).

Отсюда

$$F(t) = \beta(-t) - \alpha(-2t) + \varphi(-2t) + F(0). \quad (33)$$

Теперь из уравнений (8) и (33) найдём $f(x-y)$ и $F(y)$:

$$f(x-y) = \alpha(x-y) - \varphi(x-y) - F(0);$$

(34)

$$F(y) = \beta(-y) - \alpha(-2y) + \varphi(-2y) + F(0).$$

(35)

Из уравнения (5), на основании (34) и (35), найдём решение для уравнения (1)

$$u(x, y) = \alpha(x-y) - \varphi(x-y) + \varphi(x+y) + \beta(-y) - \alpha(-2y) + \varphi(-2y).$$

Список использованной литературы:

1. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. – Ташкент: Фан, 1986.- 220 с.
2. Кабирова, Н. (2023). О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА. *MATHEMATICS, MECHANICS AND INTELLECTUAL TECHNOLOGIES TASHKENT-2023*, 122.
3. Navro'za, K. (2024). PROBLEM FOR THE THREE-DIMENSIONAL HEAT EQUATION IN AN UNBOUNDED AND FINITE CYLINDER. *Ethiopian International Journal of Multidisciplinary Research*, 11(11), 255-261.